DM - Correction

Exercice 1 /6 + 1

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ donc $\dfrac{1}{x^2+1} \geqslant 0$.

f est bien minorée sur $\mathbb{R}$ et un $\boxed{\text{minorant est } 0.}$ /1

Ce n'est pas un minimum car l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions. /0,5

1. (b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$

$x^2 + 1 \geqslant 1$

$\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ (la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) /1

1 est un majorant de la fonction f. C'est aussi un maximum car $\boxed{f(0) = 1}$ /0,5

2. On calcule la dérivée de f : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ /1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

/1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

bonus + 1.

$f(0) = 1$

(a) D'après le tableau de variation, f est minorée par 0 mais la valeur 0 n'est jamais atteinte. Ce n'est donc pas un minimum /0,5

(b) $f'(x) = 0 \iff x = 0$

D'après le tableau de variation, 1 est un majorant de la fonction f. /0,5

De plus $f(0) = 1$.

Exercice 2 ~~/12~~ 8 + 2.

1) $f : x \longmapsto 2x - \ln(x)$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ /0,5

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ /0,5

On résout : $2 - \frac{1}{x} > 0$

$2 > \frac{1}{x}$

$2x > 1$ car $x > 0$.

$x > \frac{1}{2}$. /0,5

D'où le tableau de variation suivant

x	0		$1/2$		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$1 + \ln(2)$	$\nearrow$	

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2x - \ln(x) = +\infty$ +0,5

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

/1,5 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln(2)$

On observe que $1 + \ln(2)$ est le minimum de la fonction f.

Or $1 + \ln 2 > 0$. Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $\boxed{f(x) > 0}$ /0,5

2) $f : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{2 + 2x}$ f est bien définie si $2 + 2x \neq 0$ /0,5

$x \neq -1$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f'(x) = \frac{-e^{-x}(2+2x) - 2e^{-x}}{(2+2x)^2}$

On a $e^{-x} > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f$ $f'(x) = \frac{(-4 - 2x)e^{-x}}{(2+2x)^2}$ /~~0,5~~ 1

$(2+2x)^2 > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f$.

Donc f' est du même signe que $-4 - 2x$ 0,5

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
signe de f'		$+$		$-$	$\|$	$-$	
signe de f	?	$\nearrow$	$-\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	0

/1,5

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ +1,5

$f(-2) = -\frac{e^2}{2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ /~~0,5~~

• D'après le tableau de variation, f est positive pour $\boxed{x > -1}$ /~~0,5~~

On pouvait également obtenir la réponse par un tableau de signe de f directement

ou /1

Exercice 3 /6

1) $e^x - x^n = 0$

$$e^x = x^n$$

$$\ln(e^x) = \ln(x^n)$$ on prend la fonction ln.

$$x = n\ln(x)$$

$$\frac{x}{n} = \ln(x)$$

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0 \, .$$ /1

2) Pour étudier ce problème, on va étudier la fonction

$$f_n(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est /0,5

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}$$ /0,5

- $\frac{1}{x} - \frac{1}{n} > 0$
- $\frac{1}{x} > \frac{1}{n}$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $x < n$ /0,5

x	0		n		$+\infty$
signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(n) - 1$	$\searrow$	$-\infty$

/1

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$$ /1

L'équation admet 2 solutions si et seulement si

$$\ln(n) - 1 > 0$$ TVI /0,5.

$$\ln(n) > 1$$

$$n > e$$

$$\boxed{n \geqslant 3}$$ /1